DIDATTICA DELLE SCIENZE

Bimestrale per l'insegnamento delle scienze e della matematica

Direttore Mauro Laeng, docente di Pedagogia nell'Università di Roma

Numero 97 del gennaio 1982

Sommario

Fascicolo di 36 pagine più inserto redazionale.

Inserto

In questo numero la seconda parte di: *le alghe e l'uomo.* È di scena lo sfruttamento industriale di alcuni tipi di alghe, che fa sì che questi vegetali, nella maggior parte dei casi a nostra insaputa, entrino letteralmente nella nostra vita di tutti i giorni.

In copertina

La nebulosa planetaria anulare NGC 6720 - M 57, nella Lyra, distante dal Sole circa 1800 anniluce. Si tratta di un inviluppo gassoso sferoidale reso visibile perché eccitato dalla radiazione ultravioletta emessa da una stella centrale, recentemente riconosciuta come pulsar.

Pubblicazione bimestrale - Anno XVII - **Direttore Responsabile:** Vittorino Chizzolini - Autorizzazione del Tribunale di Brescia n. 228 del 31 Marzo 1965 - Spedizione in abbonamento postale - Gruppo IV/70 - **Direzione, Redazione, Amministrazione:** Editrice La Scuola - S.p.A. - 25186 Brescia, Via Luigi Cadorna, 11 - Conto corrente postale 17-603 - Tel. centr. (030) 47-461 - Telex 300836 SCUOLA.
Filiali: 40131 Bologna (Via L. Cipriani, 5, tel. (051) 521090 - telex 531141 SCUOBO); 20136 Milano (Viale Bligny, 7, tel. (02) 8370271 - telex 331836 SCUOMI); 00193 Roma (Via Crescenzio, 23, tel. (06) 655179 - 653989 - telex 614259 SCUORO); 80137 Napoli (Via S. Elia ai Miracoli, 19/21, tel. (081) 441200 - telex 720399 SCUONA); 70124 Bari (Via Giulio Petroni, 21 A/E, tel. (080) 228647 - telex 810391 SCUOBA).
Abbonamento annuo 1981-82: L. 12.000 (estero L. 14.500) - Sconto 10% agli abbonati di: SCUOLA MATERNA - SCUOLA ITALIANA MODERNA - SCUOLA E DIDATTICA - PROFESSIONALITÀ - Un fascicolo L. 2.200 (arretrato il doppio).
Stampa: OFFICINE GRAFICHE LA SCUOLA - 25186 BRESCIA.

Carlo Felice Manara

LA MATEMATIZZAZIONE DELLA REALTÀ NEI SUOI SVILUPPI STORICI. 2

Il calcolo infinitesimale e la meccanica classica

1. Abbiamo visto come una delle caratteristiche principali della crisi galileiana della scienza della natura sia stato il fatto di aver deciso di adottare, in modo esplicito e metodico, il linguaggio matematico come linguaggio della scienza, o almeno di quella che a quei tempi era considerata come la parte principale di essa: la meccanica razionale, che rimane ancora oggi il primo capitolo della fisica matematizzata. Invero, come abbiamo detto, i fenomeni del calore e della elettricità non erano ancora stati presi in considerazione da una scienza che iniziava la sua evoluzione verso la matematizzazione. Tuttavia la meccanica offriva nuovi contenuti alla matematica ed i nuovi metodi della geometria analitica riproponevano sotto nuova forma i vecchi contenuti della geometria classica, ponendo così nuovi problemi o problemi vecchi sotto nuova forma, e facendo sorgere precise istanze di evoluzione e di progresso per la matematica intera.
In particolare ritornavano alla ribalta le vecchie questioni sulla continuità che erano già state affrontate dalla matematica greca ed avevano dato origine a discussioni filosofiche, poi superate con l'impostazione assiomatica data alla geometria da Euclide.

2. Occorre infatti ricordare che i problemi riguardanti la continuità sono antichi quanto la matematica razionale. Abbiamo già fatto cenno (cfr. 1-2 et sqq.) delle caratteristiche (generalità, astrattezza, rigore) che distinguono la matematica greca da quelle che la precedettero o le furono contemporanee, caratteristiche le quali ne fanno il primo esempio di scienza propriamente detta che l'uomo abbia incontrato nella sua storia. Orbene proprio all'inizio di un pensiero scientifico di questo tipo si incontra una proposizione che riguarda la costituzione di quello che era immaginato come l'oggetto della geometria; infatti il teorema di Pitagora, asserendo in modo rigoroso l'esistenza di coppie di segmenti incommensurabili tra loro, costituisce una pietra miliare nel campo della conoscenza umana: invero in primo luogo esso costituisce una prova della superiorità della ragione e della logica su una esperienza qualesivoglia, perché nessuna verifica sperimentale anche con le possibilità attuali della tecnica potrebbe contraddire il risultato del teorema, il quale accerta la impossibilità di costruire un *qualunque* sottomultiplo di un segmento che stia esattamente un numero intero di volte nell'altro. In secondo luogo, e da un altro punto di vista, se vogliamo dare al teorema un significato fisico, o almeno più vicino alla nostra esperienza concreta, esso riguarda la costituzione dello spazio e afferma la non esistenza di un granello, di un atomo, di una particella elementare di spazio fisico, perché richiede proprio la indefinita divisibilità dello spazio stesso. Riteniamo che si possa fondatamente pensare che questa concezione dello spazio come indefinitamente divisibile stia alla base della geometria e della fisica della Grecia, almeno nella misura in cui la geometria veniva considerata come una scienza di contenuti, di oggetti che avevano una certa realtà concreta.
E del resto anche la teoria della proporzionalità tra grandezze si basa su una ammissione più o meno esplicita della indefinita divisibilità delle grandezze stesse. E ricordiamo anche che tale teoria, secondo i primi storici della matematica, è dovuta ad Eudosso di Cnido e quindi precede la trattatistica di Euclide. Per quanto riguarda quest'ultimo autore si può osservare che il suo atteggiamento non ammette dubbi in merito: i postulati da lui enunciati a proposito della trasportabilità del segmento, le costruzioni da lui date con strumenti elementari (riga e compasso) non sarebbero accettabili se non fosse tacitamente ammesso che per esempio una retta che ha un punto interno ad una circonferenza interseca quest'ultima in due punti. Osservazioni analoghe si possono fare a proposito della celebre questione dell'esistenza della grandezza che è quarta proporzionale dopo tre grandezze date; questione che attirò l'attenzione di G. Saccheri, che intravide qui un « neo » nella trattazione euclidea; ed anche in questo campo non pare che esistessero dubbi nella mente dei geometri greci, sulla continuità dello spazio geometrico.
Ricordiamo inoltre che la continuità è anche alla base dei paradossi celebri della filosofia eleatica (del moto, di Achille, ecc.) che nelle loro stesse formulazioni presuppongono la indefinita divisibilità dello spazio. Tale circostanza era anche il fondamento delle dimostrazioni per exaustione, e di molta parte della intuizione archimedea, la quale aveva adottato procedimenti che preludono al calcolo infinitesimale moderno. In altre parole non pare che neppure per Archimede vi fossero dubbi sulla possibilità di suddividere indefinitamente lo spazio; ma occorre dire che presso Archimede incontriamo qualche cosa di più, e precisamente incontriamo l'utilizzazione di questa indefinita divisibilità per il calcolo di aree e di volumi che non erano determinabili con i procedimenti conosciuti prima di lui. Infatti nella ce-

lebre trattazione del *Metodo,* che prelude al calcolo infinitesimale di oggi, le « fettine » sottilissime della figura considerata sono fatte traslare e scivolare, in modo che il continuo bidimensionale e tridimensionale viene immaginato come manipolabile con operazioni che interessano il calcolo delle aree e dei volumi e che tuttavia ne conservano le proprietà fondamentali.

3. Questi atteggiamenti di fondo della matematica greca si ritrovano in epoca più recente nella matematica rinascimentale, come esigenze che porteranno alla costruzione di strumenti concettuali e simbolici per dominare il continuo.
Inizia infatti a questo punto una evoluzione di pensiero che porterà ad una nuova analisi del continuo geometrico, analisi che verrà svolta da B. Cavalieri con la introduzione dei suoi « indivisibili », e soprattutto porterà alla costruzione da parte di I. Newton e di G. Leibnitz di nuovi strumenti simbolici e di nuove procedure di calcolo. Questa evoluzione trova la sua occasione, come abbiamo detto, nei nuovi problemi posti dalla meccanica razionale e dalla geometria analitica. Per quano riguarda anzitutto la geometria analitica, osserviamo che questa branca della matematica iniziava lo studio di curve la cui natura era molto più generale di quella delle curve studiate dalla geometria classica, almeno nella enorme maggioranza dei casi. Invero presso i Greci lo studio di curve diverse dalle circonferenze e dalle coniche (come la quadratrice di Ippia, la cissoide di Diocle ed altre che erano state escogitate per risolvere alcuni problemi che sfuggivano ai metodi tradizionali) era affidata alla intuizione geometrica ed alla inventiva che potremmo dire episodica ed artigianale. Tuttavia i casi in cui occorreva analizzare e studiare curve straordinarie erano ben poco numerosi di fronte alla massa dei risultati che riguardavano le altre curve; invece la geometria analitica pone il problema di tracciare e definire la tangente ad una curva qualunque in un suo punto qualunque, perché l'algebra aveva moltiplicato i casi e le possibilità ed accresciuto a dismisura il numero dei problemi. Non si poteva quindi più rimandare la soluzione del problema generale della definizione e del tracciamento delle tangenti ad una curva qualunque; non si poteva indugiare a ricercare il procedimento che avesse una portata generale e che tenesse conto delle possibilità espressive offerte dall'algebra e delle esigenze di generalità del nuovo metodo geometrico, la cui potenza era stata bene intuita ed espressa chiaramente da R. Descartes nelle frasi di chiusura della sua *Géométrie.*
In secondo luogo, tra le esigenze che hanno dato l'avvio alla costruzione di nuovi metodi matematici vanno annoverate quelle della meccanica razionale. Questa nuova scienza giunge fino ad indagare le tensioni e gli sforzi nell'interno dei corpi e deve necessariamente potere definire e misurare in modo preciso la velocità e l'accelerazione di un punto, ed il loro variare nel tempo; si poneva quindi necessariamente il problema di una analisi del continuo non soltanto geometrico, ma anche del continuo della fisica, che coinvolge anche il tempo. Non meraviglia quindi il fatto che anche Galileo abbia dato una sua soluzione del problema del calcolo del volume della sfera con metodi che si rifanno agli indivisibili; e non meraviglia il fatto che egli sia stato trascinato dai problemi della meccanica alla considerazione di insiemi infiniti, che lo hanno condotto all'analisi del celebre paradosso sui numeri quadrati.

4. Va osservato tuttavia che il momento più importante di un progresso scientifico di questa mole non è tanto quello in cui un determinato problema viene posto: infatti, nel caso del continuo, l'argómento era stato discusso fino dall'antichità, come abbiamo visto. A nostro parere il momento più importante è quello in cui incomincia a manifestarsi l'esigenza dell'invenzione di nuovi strumenti concettuali, e poi dei simboli che permettono di risolvere il problema e di dominare la realtà dei nuovi oggetti delle nostre osservazioni. Non basta, infatti, dirigere l'attenzione in una certa direzione: occorre costruire gli strumenti linguistici che permettano di parlare delle nuove cose che si studiano, di applicare alle osservazioni quella procedura facile ed immediata di deduzione che è il calcolo, cioè un insieme di regole formali ed in certo modo meccaniche che raggiungono di volta in volta il massimo possibile di astrattezza, certezza e generalità. In questo consiste soprattutto la portata e l'importanza dell'invenzione del calcolo infinitesimale: non tanto e non solo nell'aver preso in considerazione problemi nuovi, come quelli che abbiamo ricordato. Era questa infatti una conseguenza quasi naturale dell'ampliamento degli orizzonti della problematica matematica, conseguenza a sua volta del fatto che questa scienza era stata scelta come linguaggio primario delle scienze della natura. L'importanza sta soprattutto nel fatto dell'invenzione di un nuovo strumeno di deeduzione e di calcolo che, con regole formali e sicure, permettesse di dominare i nuovi contenuti, per dare alla deduzione la certezza del calcolo algebrico, e non di affidarli sempre alla inventiva del singolo, ed alle incerte acque della deduzione sillogistica.

È noto che i problemi affrontati ed analizzati portarono alla spinosa questione della valutazione di rapporti di grandezze che, nella espressione tradizonale, venivano chiamate « evanescenti ». In linguaggio moderno si potrebbe dire che si poneva l'esigenza dell'introduzione esplicita del concetto di limite, cioè della precisazione dell'intuizione del fatto dell'indefinito avvicinamento di una grandezza variabile ad un determinato valore. Era questa la strada che conduceva alla soluzione della situazione a prima vista paradossale, originata da una parte dalla necessità di rendere sempre più piccoli i termini del rapporto da calcolare e dall'altra dalla impossibilità di assumerli addirittura uguali a zero, perché in tal modo il rapporto avrebbe perso di significato. Non stiamo qui ad insistere nella descrizione delle vie seguite dai grandi fondatori del calcolo infinitesimale per giungere alla soluzione; ci limitiamo soltanto a qualche cenno, per poter riattaccarci alla discussione fatta poco fa a proposito del continuo. Non vi è dubbio infatti che questa costruzone di nuovi strumenti simbolici e linguistici (in senso lato) per dominare il continuo sia stata fatta molto prima che, con i postulati di Cantor e di Dedekind, si arrivasse a formulare in modo esplicito e rigoroso in che cosa consista questo continuo di cui si parla e su cui si calcola. Appare quindi abbastanza lecito concludere che questo calcolo dell'infinitamenle piccolo sia stato fondato e si sia sviluppato su una nozione di continuo che era oggetto di intuizione piuttosto che di una definizione precisa e logicamente ineccepibile. E qui il vocabolo « intuizione » ha un significato abbastanza equivoco, perché, nell'accezione che è comunemente accettata da quasi tutti gli studiosi, dovrebbe stare ad indicare non l'adesione immediata dell'intelletto ai primi principi della conoscenza, ma una specie di extrapolazione delle nostre percezioni sensibili immediate, con la quale giungiamo ad attribuire validità alle nostre sensazioni anche al di là dei campi in cui nascono e nei quali soltanto — a rigore — sarebbero valide.

Così, in questo secondo senso, ci capita di leggere che l'*intuizione* geometrica ci mostra la superficie di uno specchio come continua; si tratta ovviamente, come ben sappiamo, di limitazioni della nostra capacità di visione, si tratta della conformazione specifica dei nostri organi di senso, in conseguenza della quale abbiamo sensibilità ad una certa gamma di onde elettromagnetiche e non a certe altre. Non vi è nulla di logicamente necessario nell'operazione fantastica con la quale extrapoliamo alla scala atomica e subatomica queste nostre sensazioni, e quindi non vi è nulla di strano nel fatto che questa sedicente *intuizione* ci conduca spesso fuori strada e ci induca ad accettare certi modelli della realtà che mostrano poi contraddizioni e lacune logiche quando si deducono rigorosamente le conseguenze dalle premesse, senza pregiudizi e senza ubbidire ai sensi o alla fantasia.

È forse abbastanza vero il dire che proprio su questa *intuizione* era fondata l'assiomatica di Euclide; il che ovviamente non vuole costituire una critica alla costruzione logica di quel grande, ma solanto stabilire le basi per una valutazione esatta e spassionata della applicabilità della trattazione euclidea alla realtà fisica. Occorre anche dire che non vi è nulla di scandaloso nel partire da sensazioni immediate cosiffatte per la costruzione di modelli scientifici della realtà fisica, e nel conservare questi modelli come validi fino a che la deduzione, confortata da altre evidenze sperimentali, non ci costringa ad abbandonarli. Occorre soltanto ricordare sempre che modelli cosiffatti non hanno una validità assoluta e che questa specie di intuizione non ha nulla a che vedere — come abbiamo già detto — con l'apprendimento immediato dei primi principi della conoscenza intellettuale.

Se si tenessero presenti queste considerazioni, forse si eviterebbero le cosiddette *crisi* della conoscenza scientifica, che sono talvolta eccessivamente sottolineate dagli storici della scienza.

5. Ciò che abbiamo detto si riattacca, in modo più o meno diretto, alle trattazioni di I. Newton e di G. Leibnitz; infatti nel « calcolo delle flussioni » di Newton troviamo evidentemente adottato, in modo più o meno immediato ed acritico, l'insieme di immagini che la nostra extrapolazione fantastica ci fornisce del continuo geometrico. Dobbiamo a Leibnitz un simbolismo forse più elaborato di quello di Newton, che ha le sue radici nella sua analisi filosofica del continuo geometrico e fisico; analisi che si potrebbe riaccostare a quella del B. Cavalieri, molto più di quella di Newton. Invero la costruzione che Leibnitz fa dei differenziali è in linea con l'analisi metafisica della realtà, che lo conduceva, in una evoluzione intellettuale che durò per tutta la sua vita, alla ricerca degli elementi ultimi, veri costitutivi della realtà, alla decomposizione della logica in operazioni elementari, alla individuazione delle *monadi* nella realtà fisica. Non ci interessa proseguire la nostra analisi in questa direzione; ci interessa soltanto osservare che, percorrendo questa strada, Leibnitz giunge ad un calcolo, cioè ad un insieme di leggi formali, le quali permettono la deduzione delle conseguenze dalle premesse senza ricorrere al linguaggio comune, senza la necessità di utilizzare le regole del sillogismo classico il quale, nell'opinione del Nostro, dava luogo a tante contestazioni ed a tante discussioni.

Volendo riassumere, troviamo qui ancora confermato il fatto che la matematica e la fisica, in questo ordine di idee, parlano di una certa realtà senza averla bene circoscritta con regole logiche precise. In questo caso, ripetiamo, la precisa enunciazione del postulato di continuità è del secolo XIX; ciò non impedisce tuttavia che all'epoca di Newton non soltanto la geometria, ma anche la meccanica e la fisica raggiungano una sistemazione teorica che rispecchia il modello euclideo, che doveva rimanere ancora per qualche secolo il modello ideale di analisi scientifica della realtà.

In particolare una trattazione di questo tipo richiede che si precisino i termini, che si enuncino le proposizioni che esprimono le proprietà che si ritengono evidenti degli oggetti studiati, che si dimostrino le proposizioni riguardanti le proprietà meno evidenti.

Fino a tempi molto recenti, non si sono mai avanzati dubbi sulla validità di una trattazione cosiffatta, e soprattutto sulla stabilità futura dello schema teorico e dei suoi fondamenti. La fiisica, come la geometria del resto, era considerata come un edificio al quale si possono aggiungere dei piani ed annettere delle ali, ma sulle cui fondamenta nessuno può pensare di discutere.

Questo modello ideale di sistemazione di una teoria scientifica sarà considerato valido fino alla crisi della matematica del secolo XIX, ed in particolare fino al cambiamento della figura della geometria, a cui farà seguito la crisi della fisica a cavallo dei secoli XIX e XX.